LE FUNZIONI CONTINUE

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

D: sottoinsieme dei numeri reali

Sia x_0 un punto di accumulazione per D.

Si dice che f è CONTINUA IN x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Questo presuppone che siano verificate tre condizioni:

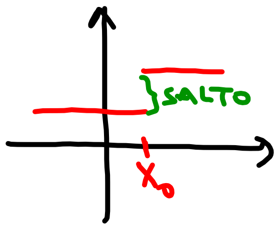
- deve esistere il $\lim_{x \to x_0} f(x)$
- deve esistere $f(x_0)$
- il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 deve essere proprio $f(x_0)$.

Se anche una sola di queste condizioni non è verificata, la funzione si dice DISCONTINUA in x_0.

CARATTERISTICHE delle DISCONTINUITÀ

Possono essere di tre specie:

<u>I specie</u> è detta anche a SALTO



Si verifica se esistono finiti $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ ma sono diversi tra loro.

Quando una funzione è razionale, fratta, con un valore assoluto, quasi sempre ha almeno una discontinuità di I specie

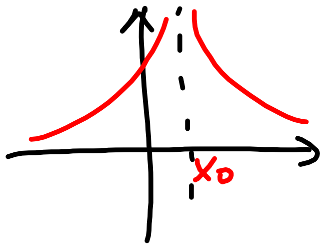
$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$$

$x = 1$ disc. I sp.

$$\lim_{x \to 1^-} f = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f = +1$$

II specie



Una funzione f che ha in x_0 una discontinuità di II specie se almeno uno dei limiti:

$$\lim_{x\to x_0^+} \; ; \; \lim_{x\to x_0^-} \; ; \; \lim_{x\to x_0}$$

o non esiste, o è infinito.

$f(x)=\frac{1}{x^2}$

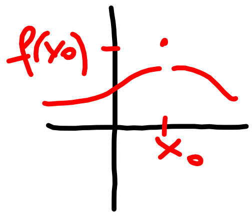
$x=0$

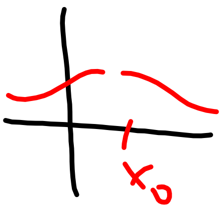
$y=\operatorname{tg} x \quad x=\frac{\pi}{2}$

III specie

detta anche ELIMINABILE

Esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$, esiste $f(x_0)$ ma sono diversi oppure $f(x_0)$ non esiste.





$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \qquad x=3$

$\nexists f(3)$ ma $\lim_{x\to 3} f(x)=6$

$f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$x=0$

* Tutti i polinomi sono funzioni continue
* le funzioni seno, coseno sono continue
* le funzioni esponenziali sono continue
* le funzioni irrazionali intere sono continue

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

* la funzione $\log x$ è continua per $x > 0$.

Con le funzioni fratte la prima cosa è andare a individuare i valori che annullano il denominatore. Poi si calcola il limite della funzione per x tendente a questi valori (da destra e da sinistra)

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

è fratta; il den. si annulla

per $x = 2$ e $x = -2$

che sono punti di discontinuità

Poiché annullano il denom. e

non il num. sono disc. di

II sp.

$$\left(\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \to -2}} f(x) = \infty \right)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} k - x^2 & \text{per } x < 0 \\ x + 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Per def. di f. continue deve risultare

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$\|$ è uguale a 1

$$\lim_{x \to 0^-} k - \underset{\downarrow\, 0}{x^2} = 1$$

$$\Longrightarrow k = 1$$

(3) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x-2} & \text{per } x > 2 \\ x^2 + \dfrac{1}{3} & \text{per } x \leq 2 \end{cases}$$

in $x = 2$ f è definita e vale $\frac{13}{3}$

Dovrebbe essere $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{3x}{x-2} = \dfrac{13}{3}$

per avere una funzione continua. Ma questo limite è $+\infty$, quindi in $x = 2$ abbiamo una disc. di II sp.

feb 28-23:11

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$$

$$x = 2$$

in x=2 abbiamo una discontinuità di terza specie, perché la funzione non è definita per x=2, ma il limite esiste finito, per x che tende a 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{x-2} = \frac{0}{0} \quad \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \quad 2$$

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{2} \qquad x=2 \text{ discontinuità } 3^a \text{ specie}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x}{x+2} = \infty \qquad x=-2 \text{ discontinuità di } 2^a \text{ specie}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)}$$

$x=1$

$x=-4$

$$\lim_{x\to 1} = \frac{2}{5}$$ III specie

$$\lim_{x\to -4} = \frac{-3}{0} = \infty$$ II specie

feb 27-08:39

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<-2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{se } -2\leq x\leq 2 \\ x & \text{se } x>2 \end{cases}$$

$x=-2$
$x=2$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} 0 = 0$$

$f(-2)=0$ f continua in (-2)

$$\lim_{x\to +2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$$ → Discontin. di 1ª specie

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{4+2^{\frac{1}{x}}}$$

$x = 0$

$4+2^{\frac{1}{x}} \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{4+2^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{4+2^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{4+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{4}$$

$x = 0$ disc. I sp.

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$$

$x^2+2x-3 \longrightarrow (x+3)(x-1)$

$x^2-3x+2 \longrightarrow (x-2)(x-1)$

$x=2 \longrightarrow$ II sp $\left(\lim_{x\to 2} f(x) = \infty \right)$

$x=1 \longrightarrow$ III sp. $\left(\lim_{x\to 1} f(x) = -4 ; \nexists f(1) \right)$