TEOREMA

Se $f: D \to \mathbb{R}$ è derivabile $\Rightarrow$ f è continua

OSS. ESISTONO FUNZIONI CONTINUE MA NON DERIVABILI

$f(x)=|x|$

non è derivabile in $x=0$ ma è continua.

$\lim_{x\to 0} |x| = 0$

Infatti

$$R.I. = \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

calcolato in $x_0=0$

$h>0$: $\frac{|h|}{h} = 1$

$h<0$: $\frac{|h|}{h} = -1$ (tende a)

$\lim_{h\to 0^+} R.I. = 1 \neq \lim_{h\to 0^-} R.I. = -1$

Dim. del teorema

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h$$

è una identità (per $h \neq 0$)

Calcolo il lim per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0$$

$f'(x_0)\cdot 0 = 0$

$f(x_0)$ resta uguale perché non dipende da h

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$ perché f per ipotesi è derivabile

quindi $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

questo equivale ad affermare che

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

cioè che f è continua in x_0.