AIMETA 88

IX Congresso Nazionale
dell'Associazione Italiana di
Meccanica Teorica ed Applicata

Anna Maria GENNAI, Cristina PADOVANI

CNUCE - ISTITUTO DEL C.N.R. - PISA

SOLUZIONI ESPLICITE DI EQUAZIONI COSTITUTIVE PER MATERIALI NON REAGENTI A TRAZIONE

Estratto dagli Atti
IX Congresso Nazionale
Volume I

Soluzioni esplicite di equazioni costitutive per materiali non reagenti a trazione

Anna Maria Gennai
Cristina Padovani

CNUCE - Istituto del C.N.R. - Pisa

AIMETA 88
Bari, 4-7 Ottobre 1988

SOMMARIO

E' noto che l'equazione costitutiva dei materiali elastici non reagenti a trazione ammette una ed una sola soluzione ([2],[4]), che, nel caso di materiali isotropi, puo' essere calcolata esplicitamente come suggerito in [9] e in [10].

In questo lavoro viene proposto un metodo per il calcolo della soluzione nel caso di materiali trasversalmente isotropi che puo' essere utilizzato in problemi in cui lo stato di deformazione e' piano.

A questo scopo si considera un sistema di disuguaglianze ottenuto applicando un noto risultato dovuto a John ad un opportuno problema di minimo vincolato. Si stabilisce quindi una relazione tra la soluzione dell'equazione costitutiva e la soluzione di tale sistema. Cio' consente di calcolare, per ciascun valore assegnato della deformazione e delle costanti elastiche del materiale, lo sforzo corrispondente.

SUMMARY

It is well-known that the constitutive equation of elastic materials not supporting tension has a unique solution ([2],[4]) which, for isotropic materials, can be calculated explicitly as shown in [9] and [10].

In this work we propose a method for calculating the solution for transversely isotropic materials, which can be used in the case of plane strain states.

For this purpose we consider a system of inequalities, resulting from the application of a theorem due to John to a suitable constrained minimum problem. We thus establish a relation between the solution of the constitutive equation and that of the system of inequalities.

This enables us to calculate, for every given value of the deformation tensor and of the material's elastic constants, the corresponding stress.

NOTAZIONI

Sia $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ una base ortonormale dello spazio vettoriale reale tridimensionale $\mathscr{V}$ dotato del prodotto interno $\cdot$.

Scriviamo $\mathbf{v} \geqslant 0$ ($\mathbf{v} \leqslant 0$) per indicare $v_i \geqslant 0$, $i=1,2,3$ ($v_i \leqslant 0$, $i=1,2,3$).

Indichiamo con Lin l'insieme di tutte le applicazioni lineari di $\mathscr{V}$ in se'.

Per ogni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathscr{V}$ chiamiamo prodotto tensoriale di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ l'elemento di Lin $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ definito da

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})\mathbf{u}=(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathscr{V} .$$

Siano inoltre

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym} &= \{A \ \ \mathrm{Lin} : \ A=A^t\} \ , \\ \mathrm{Sym}^+ &= \{A \ \ \mathrm{Sym} : \ \mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} \geqslant 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V}\} \ , \\ \mathrm{Sym}^- &= \{A \ \ \mathrm{Sym} : \ \mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} \leqslant 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V}\} \ . \end{aligned}$$

Spesso in seguito, dato $A \in \mathrm{Sym}$, scriveremo $A \geqslant 0$ (risp. $A \leqslant 0$) per indicare che $A \in \mathrm{Sym}^+$ (risp. $A \in \mathrm{Sym}^-$).

$A,B \in \mathrm{Sym}$ si dicono coassiali se esiste una base ortonormale $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ di $\mathscr{V}$ tale che

$$A = \sum_{i=1}^{3} a_i \ \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \ , \ B = \sum_{i=1}^{3} b_i \ \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i .$$

E' noto che A e B sono coassiali se e solo se commutano, cioe' se $AB = BA$ ([1]).

Come al solito consideriamo Lin dotato del prodotto scalare definito da:

$$A \cdot B = \text{traccia } (A^tB) \quad , \quad A,B \in \mathrm{Lin}$$

e diciamo che A e B sono ortogonali se $A \cdot B=0$.

Detto $\mathscr{C}$ l'insieme dei tensori del 4° ordine, cioe' delle applicazioni lineari di Lin in se', indichiamo con $\mathscr{C}^+$ il sottoinsieme di $\mathscr{C}$ costituito dagli elementi simmetrici e definiti positivi ([1]). E' evidente che gli elementi di $\mathscr{C}^+$, ristretti a Sym, sono invertibili.

. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

L'equazione costitutiva di materiali elastici non reagenti a trazione e' stata ampiamente trattata in molti lavori precedenti

([2], [3], [4]), per cui ci limiteremo a richiamarne la formulazione, tralasciando le considerazioni circa il suo significato meccanico.

Assegnati il tensore delle deformazioni linearizzate E (i.e. la parte simmetrica del gradiente di spostamento) e $\mathbf{C} \in \mathscr{C}^{+}$, ci proponiamo di determinare lo sforzo di Cauchy T e la parte anelastica della deformazione $E^a \in Sym$ tali da soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} T = \mathbf{C}[E-E^a] \\ T\cdot E^a = 0 \\ E^a \geqslant 0 \\ T \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Cominciamo col dimostrare un risultato preliminare che permette di stabilire una importante proprieta' di T ed E^a.

<u>Proposizione</u> 1.1

Siano $A \in Sym^+$ e $B \in Sym^-$ tali che $A\cdot B=0$. Allora $AB=BA=0$ e, in particolare, A e B sono coassiali.

Dimostrazione

Dato che A e B sono simmetrici, esistono due basi ortonormali di $\mathscr{V}$, $(\mathbf{g}_i)_{i=1,2,3}$ e $(\mathbf{f}_i)_{i=1,2,3}$ tali che

$$A = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i \ , \quad B = \sum_{i=1}^{3} b_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i \ ,$$

con $a_i \geqslant 0$, $b_i \leqslant 0$, $i=1,2,3$. La condizione $A\cdot B=0$ equivale all'annullarsi di $a_i b_j \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{f}_j$ per $i,j=1,2,3$ e quindi

$$AB = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \mathbf{g}_i \ \mathbf{f}_j (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{f}_j) = 0.$$

In modo analogo si prova che $BA=0$. ■

L'esistenza e l'unicita' della soluzione del problema (1.1) sono assicurate da un classico teorema di analisi convessa ([5]). In [9] e [10] viene determinata tale soluzione nel caso isotropo; il caso trasversalmente isotropo e' trattato nel paragrafo successivo.

2. IL CASO TRASVERSALMENTE ISOTROPO

Prendiamo in esame un materiale trasversalmente isotropo con costanti elastiche E_1, ν_1 nel piano x-z e E_2, ν_2 nella direzione y ortogonale a tale piano ([8]). Assumiamo che le costanti ν_1 e ν_2 siano positive e che, posto $n=E_1/E_2$, soddisfino le disuguaglianze

$$\nu_2^2 < 1/n \ , \quad 1-\nu_1-2n\,\nu_2^2 > 0 \ . \tag{2.1}$$

Consideriamo la deformazione omogenea piana $E=(e_{ij})_{i,j=1,2,3}$ dove $e_{ij}=0$ per $i=2$ o $j=2$.

Il legame costitutivo e' espresso dalle relazioni seguenti ([8]):

$$\begin{aligned} e_{11} &= t_{11}/E_1 - \nu_1 t_{22}/E_1 - \nu_2 t_{33}/E_2 + a_{11} \ , \\ e_{22} &= -\nu_1 t_{11}/E_1 + t_{22}/E_1 - \nu_2 t_{33}/E_2 + a_{22} = 0, \\ e_{33} &= -\nu_2 t_{11}/E_2 - \nu_2 t_{22}/E_2 + t_{33}/E_2 + a_{33} \ , \\ e_{12} &= 2(1+\nu_1) t_{12}/E_1 + a_{12} = 0, \\ e_{13} &= t_{13}/G_2 + a_{13} \ , \\ e_{23} &= t_{23}/G_2 + a_{23} = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove con t_{ij}, a_{ij}, $i,j=1,2,3$, abbiamo indicato rispettivamente le componenti dei tensori T ed E^a e dove abbiamo posto $G_2=E_2/[2(1-\nu_2)]$.

E' facile provare che risulta

$$t_{12}=t_{23}=a_{12}=a_{22}=a_{23}=0 \ . \tag{2.3}$$

Infatti per la proposizione 1.1 e per $(1.1)_2$, $(1.1)_3$, $(1.1)_4$, si ha $TE^a=0$ e quindi

$$t_{12}a_{12}+t_{22}a_{22}+t_{23}a_{23}=0 \ . \tag{2.4}$$

Da questa relazione, da $(1.1)_3$ e $(1.1)_4$ si ottiene

$$t_{12}a_{12}+t_{23}a_{23} \geqslant 0 \ . \tag{2.5}$$

La tesi segue allora dalle relazioni $(2.2)_2$ $(2.2)_4$, $(2.2)_6$, (2.4) e (2.5), tenuto conto che le quantita' $2(1+\nu_1)/E_1$ e G_2 sono positive.

In vista di $(2.2)_1$, $(2.2)_2$, $(2.2)_3$, $(2.2)_5$ e (2.3) si ha

$$\mathbf{t} = C(\mathbf{e} - \mathbf{x}) \ , \tag{2.6}$$

dove $\mathbf{e}=(e_{11},e_{33},2e_{13})^t$, $\mathbf{x}=(a_{11},a_{33},2a_{13})^t$, $\mathbf{t}=(t_{11},t_{33},t_{13})^t$ sono i vettori costituiti dalle componenti ingegneristiche non nulle di E, E^a, T e dove la matrice simmetrica 3x3 C di componenti

$c_{13}=c_{23}=0$,

$c_{11}=nE_2(1-n\,\nu_2^2)/(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\,\nu_2^2)$,

$c_{12}=n\,\nu_2 E_2/(1-\nu_1-2n\,\nu_2^2)$,

$c_{22}=E_2(1-\nu_1)/(1-\nu_1-2n\,\nu_2^2)$, $c_{33}=E_2/2(1-\nu_2)$

e' definita positiva in virtu' delle (2.1).

Discende inoltre da $(2.2)_2$

$$t_{22} = \nu_1 t_{11} + n\,\nu_2 t_{33} \ . \tag{2.7}$$

Da quest'ultima relazione e dall'ipotesi che ν_1 e ν_2 sono positivi segue che se t_{11} e t_{33} sono entrambi non positivi anche t_{22} lo e'.

Risolvere il problema (1.1) equivale allora a determinare un vettore $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ che soddisfi il sistema di disuguaglianze

$$\begin{cases} [C(\mathbf{e}-\mathbf{x})]_1 \leqslant 0 \\ [C(\mathbf{e}-\mathbf{x})]_2 \leqslant 0 \\ [C(\mathbf{e}-\mathbf{x})]_1 [C(\mathbf{e}-\mathbf{x})]_2 - ([C(\mathbf{e}-\mathbf{x})]_3)^2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1 x_2 - x_3^2/4 \geqslant 0 \\ C(\mathbf{e}-\mathbf{x})\cdot\mathbf{x} = 0 \ . \end{cases} \tag{2.8}$$

Per quanto osservato nel paragrafo 1 il

problema (2.8), essendo equivalente al problema (1.1), ha un'unica soluzione.

Consideriamo adesso il funzionale

$$\Omega(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}\cdot C\mathbf{x})/2 - C\mathbf{e}\cdot\mathbf{x} \ , \qquad (2.9)$$

definito sul dominio

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x}\in\mathcal{V} \ : \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_1x_2 - x_3^2/4 \geqslant 0\}.$$

Grazie alla chiusura e convessita' del dominio $\mathcal{D}$ e alla simmetria, coercitivita' e continuita' della forma $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}\cdot C\mathbf{x}$ il problema

$$\begin{cases} \min \ \Omega(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \mathcal{D} \end{cases} \qquad (2.10)$$

ha un'unica soluzione $\mathbf{x}$.

In virtu' di un teorema di John ([6]) esistono allora $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{l}=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} \vartheta \operatorname{grad} \Omega(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\cdot\operatorname{grad} \mathbf{h}(\mathbf{x})=0 \\ \mathbf{l}\cdot\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{l} \geqslant 0 \\ \vartheta \geqslant 0 \\ (\vartheta,\mathbf{l}) \neq 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2.11)$$

dove $\mathbf{h}(\mathbf{x})=(x_1, x_2, x_1x_2-x_3^2/4)$.

Il teorema seguente stabilisce una importante relazione tra la soluzione del problema (2.8) e la soluzione del sistema di disuguaglianze (2.11).

<u>Teorema</u> 2.1

i) Sia $\mathbf{x}\neq 0$ la soluzione di (2.8); allora esistono $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ tali che $(\mathbf{x}, \vartheta, \mathbf{l})$ e' soluzione di (2.11).

ii) Viceversa se $(\mathbf{x}, \vartheta, \mathbf{l})$, con $\mathbf{x}\neq 0$, e' una soluzione di (2.11), allora $\mathbf{x}$ e' soluzione di (2.8).

Dimostrazione

i) Poiche' se $\mathbf{x}$ e' soluzione di (2.8) e' anche soluzione di (2.10), la tesi discende direttamente dal teorema di John.

ii) Sia $(\mathbf{x}, \vartheta, \mathbf{l})$, con $\mathbf{x}\neq 0$, una soluzione di (2.11). Osserviamo intanto che $(2.11)_1$ e' equivalente alle equazioni scalari

$$\begin{aligned} &\vartheta[c_{11}(x_1-e_{11})+c_{12}(x_2-e_{33})] = \lambda_1 + \lambda_3 x_2 \ , \\ &\vartheta[c_{12}(x_1-e_{11})+c_{22}(x_2-e_{33})] = \lambda_2 + \lambda_3 x_1 \ , \\ &\vartheta[c_{33}(x_3-2e_{13})] = -\lambda_3 x_3/2 \ , \end{aligned} \qquad (2.12)$$

e che da $(2.11)_2$, $(2.11)_3$ e $(2.11)_4$ si ottiene

$$\begin{aligned} &\lambda_1 x_1 = 0 \ , \\ &\lambda_2 x_2 = 0 \ , \\ &\lambda_3[x_1x_2 - x_3^2/4] = 0 \ . \end{aligned} \qquad (2.13)$$

ϑ non puo' essere nullo, poiche' altrimenti da (2.12) e (2.13) risulterebbe $\mathbf{x}=0$, contro l'ipotesi. Allora da $\vartheta > 0$, da $(2.12)_1$ e $(2.12)_2$, tenendo conto di $(2.11)_3$ e $(2.11)_4$, ricaviamo

$$\begin{aligned} &c_{11}(x_1-e_{11})+c_{12}(x_2-e_{33}) \geqslant 0 \ , \\ &c_{12}(x_1-e_{11})+c_{22}(x_2-e_{33}) \geqslant 0 \ . \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Moltiplicando la $(2.12)_1$ per la $(2.12)_2$ e sottraendo dal loro prodotto il quadrato della espressione in $(2.12)_3$ otteniamo

$$[c_{11}(x_1-e_{11})+c_{12}(x_2-e_{33})][c_{12}(x_1-e_{11})+ c_{22}(x_2-e_{33})] - [c_{33}(x_3-2e_{13})]^2 = \lambda_1 \lambda_2/\vartheta^2 \geqslant 0.$$

Quest'ultima relazione, la $(2.14)_1$ e $(2.14)_2$ coincidono con le prime tre disuguaglianze di (2.8), mentre $(2.8)_4$, $(2.8)_5$ e $(2.8)_6$ sono verificate in virtu' di $(2.11)_4$. Finalmente anche la $(2.8)_7$ risulta verificata in virtu' della $(2.13)_3$ e quindi $\mathbf{x}$ e' soluzione di (2.8). ■

Ci proponiamo adesso di calcolare in modo esplicito le soluzioni di (2.8) al variare dei dati $\mathbf{e}$, ν_1, E_1, ν_2, E_2.

Osserviamo innanzi tutto che (2.8) ammette la soluzione nulla se e solo se sono verificate le disuguaglianze :

$$\begin{aligned} &[C\,\mathbf{e}]_1 \leqslant 0 \ , \\ &[C\,\mathbf{e}]_2 \leqslant 0 \ , \\ &[C\,\mathbf{e}]_1[C\,\mathbf{e}]_2 - [C\,\mathbf{e}]_3^2 \geqslant 0 \ . \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Possiamo dunque supporre che le (2.15) non siano verificate. Grazie al teorema 2.1 la soluzione puo' essere allora ottenuta come soluzione del sistema (2.11).

Supponendo $\lambda_3 = 0$ si ottengono i valori di $\mathbf{x}$ riportati in $(2.19)_2$, $(2.19)_3$ e $(2.19)_4$.

Passiamo adesso a considerare $\lambda_3 > 0$.

Facili calcoli mostrano che il supporre $(\lambda_1, \lambda_2)\neq 0$ conduce a valori di $\mathbf{x}$ gia' determinati nel caso $\lambda_3 = 0$.

Siano allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Il sistema (2.11) puo' essere cosi' riscritto

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + (c_{12} - \alpha_3)x_2 = C \\ (c_{12} - \alpha_3)x_1 + c_{22}x_2 = B \\ x_3 = 4c_{33}e_{13}/(2c_{33} + \alpha_3) \\ \alpha_3 > 0 \\ (x_1, x_2) > 0 \\ x_1x_2 - x_3^2/4 = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

dove si e' posto $C=c_{11}e_{11}+c_{12}e_{33}$, $B=c_{12}e_{11}+c_{22}e_{33}$ e $\alpha_3 = \lambda_3/\vartheta$. Cominciamo col supporre $c_{11}c_{22}-(c_{12}-\alpha_3)^2=0$.

Si ottiene allora $\alpha_3 = c_{12}+\sqrt{c_{11}c_{22}}$ e dalla $(2.16)_3$ si ricava

$x_3=4c_{33}e_{13}/(2c_{33}+c_{12}+\sqrt{c_{11}c_{22}})$.

Il sistema costituito delle equazioni $(2.16)_1$

e $(2.16)_2$ e' risolubile se e solo se

$$c_{11}B+\sqrt{c_{11}c_{22}}C=0 \quad e \quad c_{22}C+\sqrt{c_{11}c_{22}}B=0 \ ,$$

e in tal caso le sue soluzioni sono (x_1,x_2) con

$$x_1=(\sqrt{c_{11}c_{22}}x_2+C)/c_{11} \ . \qquad (2.17)$$

Tra tutte le soluzioni del sistema $(2.16)_1$ - $(2.16)_2$ quella soddisfacente $(2.16)_3$ e $(2.16)_4$ e'

$$x_1=(\sqrt{c_{11}c_{22}}K+2C)/2c_{11} \ , \qquad x_2=K/2 \ ,$$

dove $K= - M+\sqrt{M^2+Q}$, avendo posto $M=C/\sqrt{c_{11}c_{22}}$, $Q=NM/(PC)$, $N=16c_{33}^2\, e_{13}^2\, c_{11}$, $P=(2c_{33}+c_{12}+\sqrt{c_{11}c_{22}})^2$.

Se invece $c_{11}c_{22}-(c_{12}-\alpha_3)^2\neq 0$, da $(2.16)_1$ e $(2.16)_2$ si ottiene, posto $A=c_{11}c_{22}-c_{12}^2$:

$$x_1=(e_{11}A+\alpha_3 B)/(A-\alpha_3^2+2c_{12}\alpha_3) \ ,$$
$$x_2=(e_{33}A+\alpha_3 C)/(A-\alpha_3^2+2c_{12}\alpha_3) \ , \qquad (2.18)$$

Il moltplicatore α_3 deve essere calcolato in modo che (x_1,x_2,x_3) soddisfi $(2.16)_2$, pertanto α_3 deve essere una radice del polinomio $P(y)=a_4y^4+a_3y^3+a_2y^2+a_1y+a_0$ di coefficienti

$$a_4=BC-4c_{33}^2\, e_{13}^2 \ ,$$

$$a_3=4BCc_{33}+e_{33}AB+e_{11}AC+16c_{12}c_{33}^2\, e_{13}^2 \ ,$$

$$a_2=4BCc_{33}^2+e_{11}e_{33}A^2+4c_{33}e_{33}AB+ +4c_{33}e_{11}AC+8Ac_{33}^2\, e_{13}^2-16c_{12}^2\, c_{33}^2\, e_{13}^2 \ ,$$

$$a_1=4c_{33}(e_{11}e_{33}A^2+c_{33}e_{33}AB+ +c_{33}e_{11}AC-4Ac_{12}c_{33}e_{13}^2 \ ),$$

$$a_0=4c_{33}^2\, A^2(e_{11}e_{33}-e_{13}^2 \ ).$$

L'esistenza ed unicita' della soluzione di (2.8) e il teorema 2.1 garantiscono che se i dati appartengono alla regione R_4 complementare di $R = \bigcup_{i=1}^{5} Ri$, dove

$$R_1=\{\mathbf{e}:\ e_{11}\geq 0,\ e_{33}\geq 0,\ e_{11}e_{33}-e_{13}^2\geq 0\} \ ,$$

$$R_2=\{\mathbf{e}:\ e_{33}\leq 0,\ e_{11}+c_{12}e_{33}/c_{11}\geq 0,\ e_{13}=0\} \ ,$$

$$R_3=\{\mathbf{e}:\ e_{11}\leq 0,\ e_{33}+c_{12}e_{11}/c_{22}\geq 0,\ e_{13}=0\} \ ,$$

$$R_4=\{\mathbf{e}:\ C\leq 0,\ B\leq 0,\ CB-4c_{33}^2\, e_{13}^2\geq 0\} \ ,$$

$$R_5=\{\mathbf{e}:\ c_{11}B+\sqrt{c_{11}c_{22}}C=c_{22}C+\sqrt{c_{11}c_{22}}B=0\} \ ,$$

esiste una radice positiva α_3 del polinomio $P(y)$ tale che le quantita' x_1 , x_2 in (2.18) e x_3 in $(2.16)_3$ soddisfano le condizioni $(2.16)_5$ e $(2.16)_6$.

I risultati fin qui ottenuti possono essere cosi' sintetizzati:

$$\mathbf{e}\in R_1:\quad x_1 = e_{11},\ x_2=e_{33},\ x_3=2e_{13},$$

$$\mathbf{e}\in R_2:\quad x_1=e_{11}+c_{12}e_{33}/c_{11},\ x_2=0,\ x_3=0,$$

$$\mathbf{e}\in R_3:\quad x_1=0,\ x_2=e_{33}+c_{12}e_{11}/c_{22},\ x_3=0, \qquad (2.19)$$

$$\mathbf{e}\in R_4:\quad x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,$$

$$\mathbf{e}\in R_5:\quad x_1=(K\sqrt{c_{11}c_{22}}+2C)/2c_{11},\ x_2=K/2,\ x_3=4c_{33}e_{13}/(2c_{33}+c_{12}+\sqrt{c_{11}c_{22}}),$$

$$\mathbf{e}\in R_4:\quad x_1=(e_{11}A+\alpha_3 B)/(A-\alpha_3^2+2c_{12}\alpha_3),\ x_2=(e_{33}A+\alpha_3 C)/(A-\alpha_3^2+2c_{12}\alpha_3),\ x_3=4c_{33}e_{13}/(2c_{33}+\alpha_3).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. E. GURTIN, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, 1981.

[2] G. ANZELOTTI, A Class of non Coercive Functionals and Masonry-Like Materials. Ann Inst. H. Poincare', Vol. 2, 1985.

[3] M. GIAQUINTA, G. GIUSTI, Researches on the Equilibrium of Masonry Structury Arch. Rational Mech. Analysis, Vol. 88, 1988.

[4] G. DEL PIERO, Comunicazione Privata, 1987.

[5] J. CEA, Lectures on Optimization, Theory and Algoritms. Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 1978.

[6] F. GIANNESSI, Metodi matematici della programmazione. Metodi lineari e non lineari. Quaderni dell'U.M.I. n. 23, 1982.

[7] R. W. COTTLE, F. GIANNESSI, J. L. LIONS, Variational Inequalities and Complementarity Theory and Applications, Wiley 1980.

[8] O.C. ZIENKIEWICZ, The Finite Element Methods. MC Graw - Hill 1977.

[9] D. ABRUZZESE, A. GRIMALDI, E. SACCO, Indagine numerica su alcuni problemi di materiali non resistenti a trazione, Rapp. 14 Dip. di Ingegneria Civile Edile, II Universita' di Roma, 1987.

[10] A. M. GENNAI, C. PADOVANI, Constitutive Equations for Masonry-like Materials, III German-Italian Symposium on the Applications of Mathematics in Industry and Technology, Siena 18-22 giugno 1988.