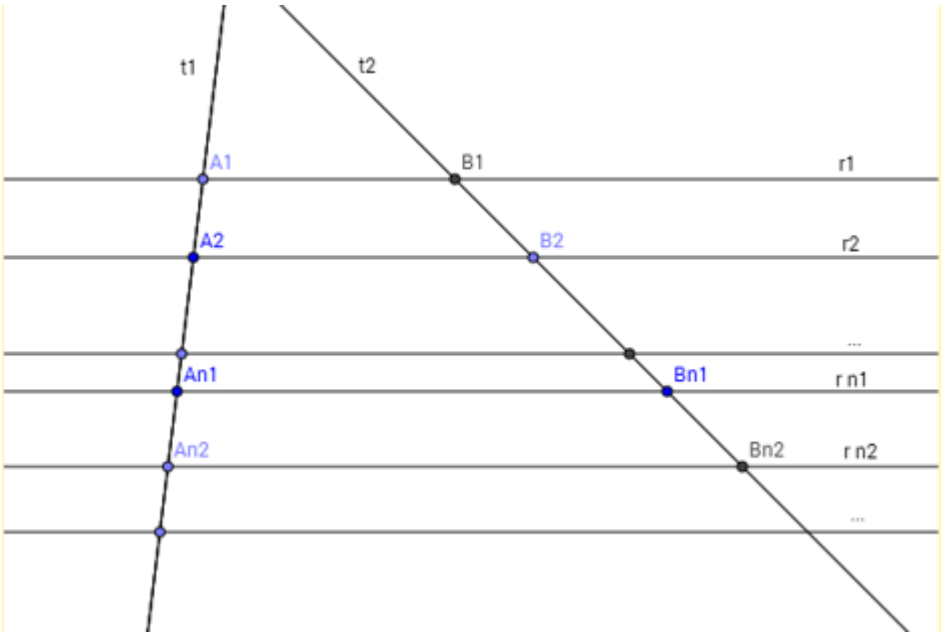
TEOREMA DI TALETE

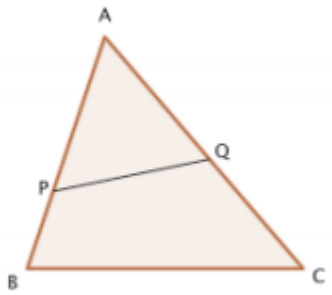
Due rette t_1 e t_2 formano su un fascio di rette parallele coppie di segmenti a due a due proporzionali.



Quindi $A_1A_2:A_{n1}A_{n2}= B_1B_2:B_{n1}B_{n2}$

Corollario: una retta parallela al lato di un triangolo divide gli altri due lati in segmenti proporzionali tra loro e viceversa se una retta determina su due lati di un triangolo segmenti proporzionali, allora è parallela al terzo lato.

Consideriamo un triangolo ABC come in figura e tracciamo un segmento PQ che congiunge un punto P sul lato AB con un punto Q sul lato AC.

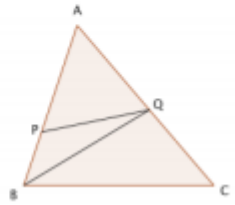


Possiamo riscrivere l'enunciato nella forma

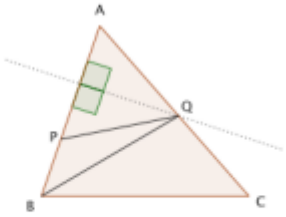
(1) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ se e solo se PQ ∥ BC.

Dimostrazione

Congiungiamo Q con B.



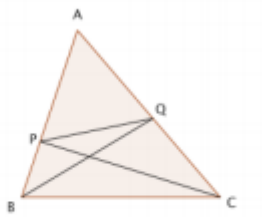
Consideriamo i triangoli APQ e PBQ. L'altezza di APQ rispetto alla base AP è uguale all'altezza di PBQ rispetto alla base PB.



Poichè i triangoli APQ e PBQ hanno la stessa altezza, le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi:

(*) $$\frac{area\ \ APQ}{area\ \ PBQ} = \frac{AP}{PB}\ .$$

Ora congiungiamo P con C. Analogamente a prima, i triangoli APQ e PCQ hanno la stessa altezza rispetto alle basi AQ e QC, rispettivamente. Le aree dei triangoli APQ e PCQ sono quindi proporzionali alle rispettive basi:



(**) $$\frac{area\ \ APQ}{area\ \ PCQ} = \frac{AQ}{QC}$$

Sia in (*) che in (**) il rapporto a sinistra studia la relazione tra l'area di APQ e quella di un altro triangolo. Affinché i rapporti in (*) e in (**) siano uguali, occorre e basta che *area* PQB = *area* PCQ. Dunque

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ se e solo se } \textit{area}\ \text{PQB} = \textit{area}\ \text{PCQ}\ . \qquad (***)$$

Riguardiamo i triangoli PQB e PQC come triangoli di base PQ: poiché essi hanno la stessa base, la loro area coincide se e solo se hanno altezza uguale, se e solo se la distanza tra B e P coincide con la distanza tra C e Q, cioè se e solo se PQ ∥ BC.

Abbiamo così concluso la dimostrazione.♣

Corollario Mantenendo le notazioni del teorema,

$$\text{PQ} \parallel \text{BC se e solo se } \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \text{ se e solo se } \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC} \text{ se e solo se } \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ}$$

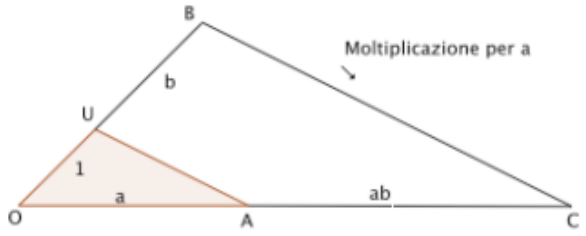
Corollario Mantenendo le notazioni del teorema,

$$\text{PQ} \parallel \text{BC se e solo se } \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \text{ se e solo se } \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC} \text{ se e solo se } \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ}$$

Applicazioni del teorema di Talete

1. Moltiplicazione di segmenti

Nel primo libro degli Elementi, Euclide insegna come sommare e sottrarre tra loro due segmenti. Il Teorema di Talete ci mostra come moltiplicare e dividere tra loro due segmenti. Incominciamo dalla moltiplicazione.
Occorre fissare un segmento come unità di misura, che denoteremo con OU.
Consideriamo ora due segmenti, di lunghezza *a* e *b* rispettivamente. Vogliamo, con riga e compasso, costruire un segmento la cui lunghezza sia *ab*.

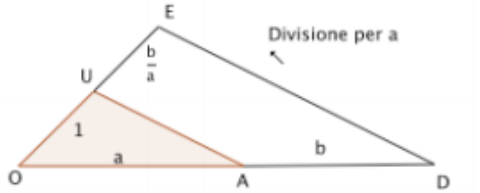


Disegniamo un segmento di lunghezza *a* con primo estremo O e lo chiamiamo OA.
Prolunghiamo OU con un segmento UB tale che la lunghezza di UB sia *b*.
Tracciamo per B la parallela a UA e chiamiamo C la sua intersezione con il prolungamento di OA.
Mostriamo che il segmento AC ha lunghezza *ab*: infatti, per il teorema di Talete,
$\frac{OA}{OU} = \frac{AC}{UB}$ e dunque $\frac{a}{1} = \frac{AC}{b}$.

2. Divisione di segmenti

Occorre fissare un segmento come unità di misura, che denoteremo con OU.

Consideriamo due segmenti, di lunghezza a e b rispettivamente. Vogliamo, con riga e compasso, costruire un segmento la cui lunghezza sia $\frac{b}{a}$.



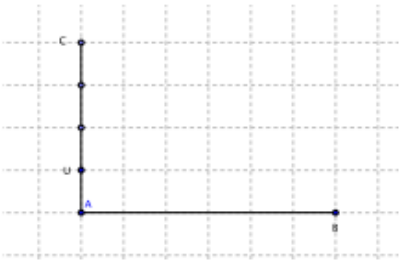
Disegniamo un segmento di lunghezza a con primo estremo O e lo chiamiamo OA.
Prolunghiamo OA con un segmento AD tale che la lunghezza di AB sia b.
Tracciamo per D la parallela a UA e chiamiamo E la sua intersezione con il prolungamento di OU.

Mostriamo che il segmento UE ha lunghezza $\frac{b}{a}$: infatti, per il teorema di Talete,

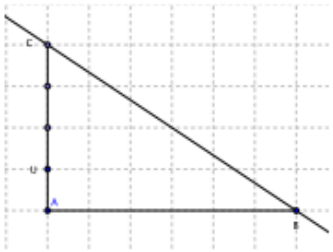
$\frac{OA}{OU} = \frac{AD}{UE}$ e dunque $\frac{a}{1} = \frac{b}{UE}$.

3. Divisione di un segmento in *n* parti uguali

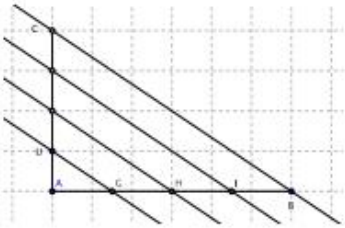
Dato un segmento AB, vogliamo dividerlo in n parti uguali, usando solo riga e compasso (n numero naturale fissato > 0).
Fissiamo una unità di misura di lunghezza 1.
Su un altro segmento uscente da A (disegnato in verticale nella figura), tracciamo n segmenti uguali a 1 (n=4 nella figura): nella figura, AU ha lunghezza 1, come ciascuno degli altri segmenti tra loro adiacenti; viene indicato con C l'ultimo estremo di tali segmenti



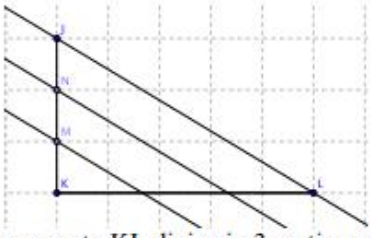
Ora tracciamo la retta per C e B

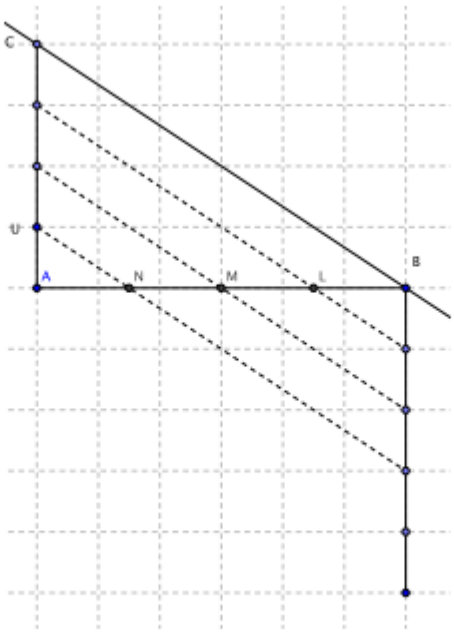


e poi le parallele a questa retta passanti per ciascuno degli estremi dei segmenti uguali su AC:



Il segmento AB risulta in questo modo suddiviso in parti uguali (lo stesso numero di parti uguali che erano stati segnati in AC).



Il segmento KL diviso in 3 parti uguali

Un modo comodo per tracciare le rette parallele è di costruire una retta trasversale anche sulla seconda estremità del segmento da suddividere, come in figura: